SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **NAM ĐỊNH**	**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM THI** **ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN** **Năm học 2021– 2022.** Môn thi: **TOÁN (chuyên)** (Hướng dẫn chấm gồm: 05 trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Tính giá trị của biểu thức $S=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

b) Cho đa thức bậc hai $P(x)$ thỏa mãn $P(1)=1,\ P(3)=3,\ P(7)=31$. Tính giá trị của $P(10)$.

Ý	Nội dung	Điểm
1a **1,0đ**	+ Ta có $0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1+2(ab+bc+ca)$ suy ra $ab+bc+ca=-\dfrac{1}{2}$.	0,5
	+ Từ $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$ suy ra $S=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\dfrac{1}{4}$.	0,5
1b **1,0đ**	+ Đặt $P(x)=ax^2+bx+c$ thì có hệ $\begin{cases} a+b+c=P(1)=1 \\ 9a+3b+c=P(3)=3 \\ 49a+7b+c=P(7)=31 \end{cases}$.	0,5
	+ Giải hệ được $a=1,\ b=-3,\ c=3$.	0,25
	+ Suy ra $P(x)=x^2-3x+3$ nên $P(10)=10^2-3.10+3=73$.	0,25
	Cách khác: + Thấy $P(x)-x$ có nghiệm là $x=1, x=3$ nên có $P(x)-x=a(x-1)(x-3)$. + Từ $P(7)=31$ nên $31-7=a(7-1)(7-3)\Leftrightarrow a=1$. + Vậy $P(x)=(x-1)(x-3)+x \Rightarrow P(10)=73$.	

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2+4=\dfrac{7x^2}{x+1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(2x+1)=y(x+y-2)+1 \\ 4\sqrt{x+3}+2\sqrt{y+2}=11-x. \end{cases}$

Ý	Nội dung	Điểm
2a **1,0đ**	+ Điều kiện xác định $x\neq -1$. + PT cho tương đương với $\left(x-\dfrac{x}{x+1}\right)^2+4=\dfrac{7x^2}{x+1}-\dfrac{2x^2}{x+1}$	0,25

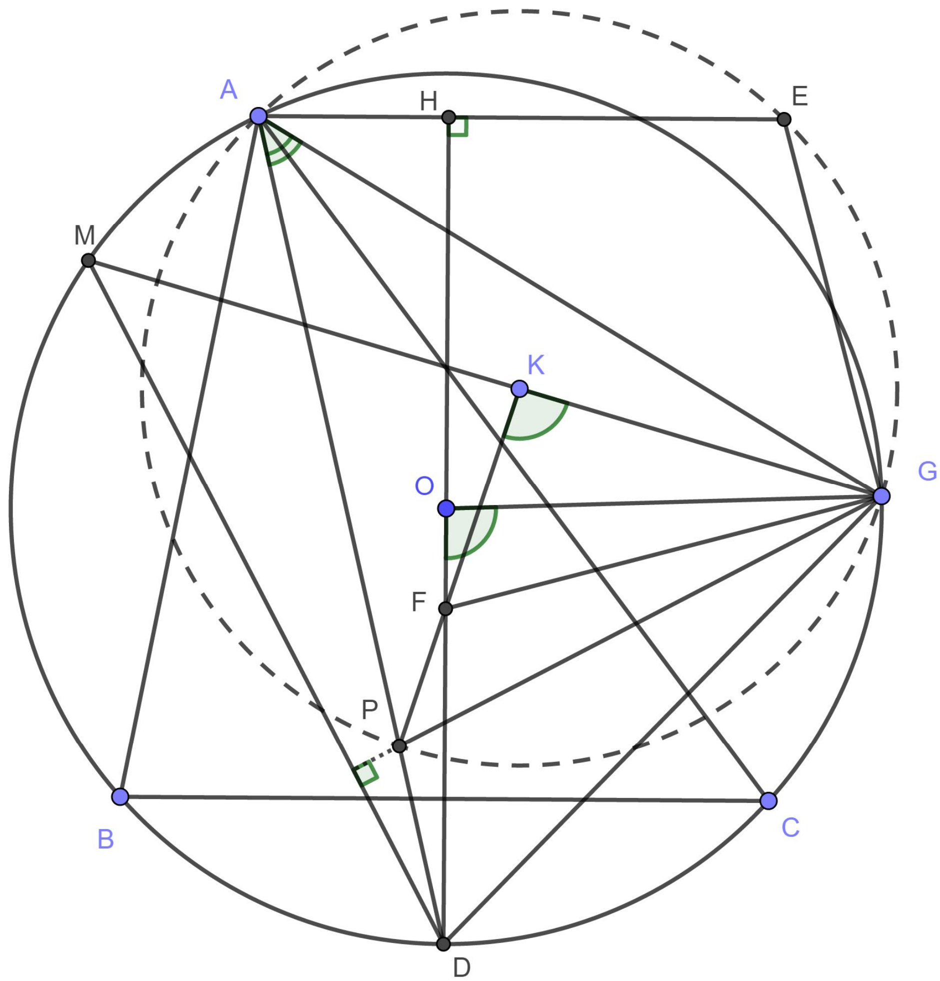
	$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)^2 - 5.\dfrac{x^2}{x+1} + 4 = 0$	
	$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1} = 1$ (1) hoặc $\dfrac{x^2}{x+1} = 4$ (2)	0,25
	+ Giải (1) được $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.	0,25
	+ Giải (2) được $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$. Tập nghiệm của phương trình là $\left\{\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; 2 \pm 2\sqrt{2}\right\}$	0,25
	Cách khác: Quy đồng, rút gọn được $x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)(x^2 - 4x - 4) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - 4x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = 2 \pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)	
2b **1,0đ**	Xét hệ $\begin{cases} x(2x+1) = y(x+y-2) + 1 & (1) \\ 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{y+2} = 11 - x & (2) \end{cases}$ + Điều kiện xác định: $x \geq -3$ và $y \geq -2$.	0,25
	+ Ta có $(1) \Leftrightarrow y^2 + y(x-2) - 2x^2 - x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (y - 1 - x)(y - 1 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = 1 - 2x \end{array}\right.$.	0,25
	+ Với $y = x + 1$, thay vào (2) ta được $6\sqrt{x+3} = 11 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 11 - x \geq 0 \\ 36(x+3) = (11-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 29 - 6\sqrt{23}$. Khi $x = 29 - 6\sqrt{23}$ thì $y = x + 1 = 30 - 6\sqrt{23}$ (thỏa mãn điều kiện).	0,25
	+ Với $y = 1 - 2x$, thay vào (2) ta được $4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11 - x \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{3-2x} - 1\right)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{3-2x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$. Khi đó có $y = 1 - 2x = -1$ (thỏa mãn điều kiện). + Kết luận: Hệ cho có đúng hai bộ nghiệm $(x; y)$ là $\left(29 - 6\sqrt{23}; 30 - 6\sqrt{23}\right)$, $(1; -1)$.	0,25

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D $(D \neq A)$. Trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) lấy điểm G khác C sao cho $AG > GC$; một đường tròn có tâm là K đi qua A, G và cắt đoạn thẳng AD tại điểm P nằm bên trong tam giác ABC. Đường thẳng GK cắt đường tròn (O) tại điểm M $(M \neq G)$.

a) Chứng minh các tam giác KPG, ODG đồng dạng với nhau.

b) Chứng minh GP, MD là hai đường thẳng vuông góc.

c) Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng OD và KP, đường thẳng qua A và song song với BC cắt đường tròn (K) tại điểm E $(E \neq A)$. Chứng minh rằng tứ giác $DGFP$ là tứ giác nội tiếp và $\widehat{EGF} = 90^0$.



Ý	Nội dung	Điểm
3a 1,0đ	+ Xét đường tròn (O) có $\widehat{DOG} = 2\widehat{DAG}$.	0,25
	+ Xét đường tròn (K) có $\widehat{PKG} = 2\widehat{PAG}$.	0,25
	Suy ra $\widehat{DOG} = \widehat{PKG}$ (1).	0,25
	+ Tam giác PKG cân ở K và tam giác DOG cân ở O (2). Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác này đồng dạng với nhau.	0,25

3b 1,0đ	Có $\widehat{MGP}=\widehat{KGP}=90^0-\dfrac{\widehat{GKP}}{2}=90^0-\widehat{DAG}$	0,5
	Mặt khác $\widehat{DAG}=\widehat{DMG}$ nên $\widehat{MGP}+\widehat{DMG}=90^0$, suy ra $GP\perp DM$	0,5
3c 1,0đ	Ta có $\widehat{FPG}=\widehat{KPG}=\widehat{ODG}=\widehat{FDG}$, suy ra tứ giác $DGFP$ nội tiếp	0,5
	Suy ra $\widehat{DFG}=\widehat{DPG}$. Tứ giác $APGE$ nội tiếp nên $\widehat{DPG}=\widehat{AEG}$. Suy ra $\widehat{AEG}=\widehat{DFG}$ hay $\widehat{HEG}=\widehat{DFG}$ với H là giao điểm của OD và AE. Suy ra tứ giác $HEGF$ nội tiếp.	0,25
	$OD\perp BC$ nên $OD\perp AE$, suy ra $\widehat{FHE}=90^0$, do đó $\widehat{EGF}=180^0-\widehat{FHE}=90^0$.	0,25

Câu 4 (1,5 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^2y^2(y-x)=5xy^2-27$.

b) Cho $p_1,p_2,\ldots,p_{12}$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p_1^2+p_2^2+\cdots+p_{12}^2$ chia hết cho 12.

Ý	Nội dung	Điểm
4a 0,75đ	+ Giả sử có $x,y\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu. Ta có $y^2\left(x^3-x^2y+5x\right)=27\ (1)$. Suy ra 27 chia hết cho y^2 nên $y^2\in\{1;9\}$ hay $y\in\{1;3\}$.	0,25
	+ Xét $y=1$, thay vào (1) có $x^3-x^2+5x=27\Leftrightarrow x\left(x^2-x+5\right)=27$. Điều này chứng tỏ x là ước nguyên dương của 27 và có $5x\le 27\Leftrightarrow x\le\dfrac{27}{5}$, suy ra $x=1$ hoặc $x=3$. Thử trực tiếp hai trường hợp này thấy không thỏa mãn.	0,25
	+ Xét $y=3$, thay vào (1) có $x^3-3x^2+5x-3=0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2-2x+3\right)=0\Leftrightarrow x=1$. Vậy $(x;y)=(1;3)$.	0,25
4b 0,75đ	+ Với p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p=6k\pm1\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$	0,25
	Suy ra $p^2-1=36k^2\pm12k$ chia hết cho 12.	0,25
	+ Áp dụng có $\left(p_1^2-1\right)+\left(p_2^2-1\right)+\ldots+\left(p_{12}^2-1\right)$ chia hết cho 12 Suy ra $p_1^2+p_2^2+\cdots+p_{12}^2$ chia hết cho 12.	0,25
	Cách viết khác: + Từ $p=3k\pm1\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ suy ra $p^2-1=9k^2\pm6k$ chia hết cho 3. + Từ $p=4k\pm1\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$, khi đó có $p^2-1=16k^2\pm8k$ chia hết cho 4. Suy ra p^2-1 chia hết cho 12. + Áp dụng suy ra $p_1^2+p_2^2+\cdots+p_{12}^2$ chia hết cho 12.	

Câu 5 (1,5 điểm).

a) Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $\dfrac{a+bc}{b+c}+\dfrac{b+ca}{c+a}+\dfrac{c+ab}{a+b}\ge 2$.

b) Xét hai tập hợp A, B khác $\varnothing$ thỏa mãn $A \cap B = \varnothing$ và $A \cup B = \mathbb{N}^*$. Biết rằng A có vô hạn phần tử và tổng của mỗi phần tử thuộc A với mỗi phần tử thuộc B là phần tử thuộc B. Gọi x là phần tử bé nhất thuộc B thỏa mãn $x \neq 1$. Hãy tìm x.

Ý	Nội dung	Điểm
5a 0,75đ	+ Ta có $\dfrac{a+bc}{b+c} = \dfrac{a(a+b+c)+bc}{b+c} = \dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c}$. Tương tự thì BĐT cần chứng minh được viết lại thành $$\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \dfrac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2.$$	0,25
	+ Theo BĐT Cauchy có $$\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \dfrac{(b+c)(b+a)}{c+a} \geq 2\sqrt{\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c}.\dfrac{(b+c)(b+a)}{c+a}} = 2(a+b) \quad (1)$$	0,25
	Tương tự có $\dfrac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(b+c) \quad (2)$ $$\dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(c+a) \quad (3).$$ Cộng vế các BĐT (1), (2), (3) suy ra ĐPCM.	0,25
5b 0,75đ	+ Chứng minh $1 \in B$: Giả sử ngược lại, $1 \in A$, khi đó với $x \in B$ có $x+1 \in B$. Có $1 \in A, x+1 \in B$ suy ra $x+2 = 1+(x+1)$ thuộc B. Cứ như vậy có $x, x+1, x+2, \ldots$ đều nằm trong B nên suy ra A là tập hữu hạn, mâu thuẫn. Vậy có $1 \in B$.	0,25
	+ Xét $x \geq 4$: Do $1 < x-2 < x$ nên từ tính bé nhất của *x* trong *B* suy ra $x-2 \in A$, suy ra $x-1 = (x-2)+1$ thuộc *B*, điều này lại mâu thuẫn với tính bé nhất của *x* trong *B*. Vậy phải có $x = 2$ hoặc $x = 3$.	0,25
	+ Với $x = 2$, cách chọn A là tập các số nguyên dương chia hết cho 3 và B là tập hợp các số nguyên dương không chia hết cho 3 thỏa mãn yêu cầu. Với $x = 3$, cách chọn A là tập hợp các số nguyên dương chẵn và B là tập hợp các số nguyên dương lẻ thỏa mãn yêu cầu. Tóm lại $x = 2$ hoặc $x = 3$.	0,25

Chú ý:

- Nếu thí sinh làm đúng mà cách giải khác với đáp án và phù hợp kiến thức của chương trình THCS thì tổ chấm thống nhất cho điểm thành phần đảm bảo tổng điểm như hướng dẫn quy định.

- Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

---------- HẾT ----------