

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN (chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút.

(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho các số thực x, y, z khác 0. Đặt $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ và $c = xy + \frac{1}{xy}$.

Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$.

b) Cho các số thực a, b khác -2 thỏa mãn $(2a+1)(2b+1) = 9$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b}$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2} \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4. \end{cases}$

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại M, N và có tâm I thuộc cạnh BC . Kẻ đường cao AH của tam giác ABC .

a) Chứng minh các điểm A, M, H, I, N cùng thuộc một đường tròn và HA là tia phân giác của góc MHN .

b) Đường thẳng đi qua I và vuông góc với BC cắt MN tại K . Chứng minh AK đi qua trung điểm D của BC .

c) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S . Chứng minh $BAS = CAD$.

Câu 4 (1,5 điểm).

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + y^2 = xy^2 + 1$.

b) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $c + \frac{1}{b} = a + \frac{b}{a}$. Chứng minh ab là lập phương của một số nguyên dương.

Câu 5 (1,5 điểm).

a) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 \leq \frac{1}{8} + a^4 + b^4 + c^4$.

b) Ban đầu có 2020 viên sỏi để trong 1 chiếc túi. Có thể thực hiện công việc như sau:

Bước 1: Bỏ đi 1 viên sỏi và chia túi này thành 2 túi mới.

Bước 2: Chọn 1 trong 2 túi này sao cho túi đó có ít nhất 3 viên sỏi, bỏ đi 1 viên từ túi này và chia túi đó thành 2 túi mới, khi đó có 3 túi.

Bước 3: Chọn 1 trong 3 túi này sao cho túi đó có ít nhất 3 viên sỏi, bỏ đi 1 viên từ túi này và chia túi đó thành 2 túi mới, khi đó có 4 túi.

Tiếp tục quá trình trên. Hỏi sau một số bước có thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi hay không?

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:.....

Họ tên, chữ ký GT 1: <https://thanhbk.vn/> - chia sẻ tài liệu

Số báo danh:.....

Họ tên, chữ ký GT 2:.....