SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM THI
ĐỀTHI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN
Nămhọc 2020– 2021.
Mônthi: **TOÁN (chuyên)**

(Hướngdẫnchấmgồm: 05trang)

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

a) Cho cácsốthực x, y, z khác 0. Đặt $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ và $c = xy + \frac{1}{xy}\cdot$

Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4.$

b) Cho cácsốthực a, b khác -2 thỏamãn $(2a+1)(2b+1) = 9.$

Tínhgiátrịcủabiểuthức $A = \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b}\cdot$

Ý	Nội dung	Điểm
a (1,0 điểm)	Ta có $a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,\ b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$ và $c^2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2.$	0,25
	Ta có $ab = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$	0,25
	Suy ra $abc = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$	0,25
	Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4.$	0,25
b (1,0 điểm)	Từ điều kiện bài toán rút được $a = \frac{9}{2(2b+1)} - \frac{1}{2}$ (do $2b+1 \neq 0$).	0,25
	Suy ra $\frac{1}{2+a} = \frac{2b+1}{3(b+2)}.$	0,25
	Suyra $A = \frac{2b+1}{3(b+2)} + \frac{1}{b+2} = \frac{2b+1+3}{3(b+2)} = \frac{2}{3}.$	0,5

Câu 2*(2,0 điểm)*

a) Giảiphươngtrình $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}.$

b) Giảihệ phươngtrình $\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \dfrac{(x-y)^2}{2} \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4. \end{cases}$

Ý	Nội dung	Điểm
a (1,0 điểm)	Điềukiện $x \geq -3.$ Đặt $\sqrt{x+3} = t, (t \geq 0)$, phươngtrìnhtrởthành $2x^2 + t^2 - 3xt = 0.$	0,25
	Phươngtrìnhtươngđương $(x-t)(2x-t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t \\ 2x = t \end{array}\right.$	0,25
	Với $x = t$ ta được $x = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện)	0,25

	Với $2x=t$ ta được $2x=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x^2=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{3}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1,\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.	0,25
b (1,0 điểm)	$\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} & (1)\\(x+y)(x+2y)+3x+2y=4 & (2)\end{cases}$ Điều kiện xác định $x,y\ge-\dfrac{1}{2}$. Phương trình (2) tương đương $(x+y-1)(x+2y+4)=0$ Với điều kiện xác định ta có $x+2y+4\ge-\dfrac{1}{2}-1+4>0$ nên dẫn đến $x+y=1$.	0,25
	Đặt $a=\sqrt{2x+1}\ge 0$ và $b=\sqrt{2y+1}\ge 0$, kếthợp (1) và $x+y=1$ ta cóhệphươngtrình $\begin{cases}a+b=\dfrac{1}{8}\left(a^2-b^2\right)^2\\a^2+b^2=4\end{cases}$ Trườnghợp 1: $\begin{cases}a+b=0\\a^2+b^2=4\end{cases}$, hệvônghiệm.	0,25
	Trườnghợp 2: $\begin{cases}(a-b)^2(a+b)=8\\a^2+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)(4-2ab)=8\\(a+b)^2-2ab=4\end{cases}$ Đặt $\begin{cases}S=a+b\\P=ab\end{cases}$, hệtrởthành $\begin{cases}S(4-P)=8\\S^2-2P=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{S^2-4}{2}\\S\left(4-\dfrac{S^2-4}{2}\right)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{S^2-4}{2}\\S\in\left\{2,-1\pm\sqrt{5}\right\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=0\\S=2\end{cases}$	0,25
	Suy ra $\begin{cases}a+b=2\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}\\\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}\end{array}\right.$, từđósuyratậpnghiệm (x,y) củahệlà $\left\{\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.	0,25

Câu 3 ***(3,0 điểm)***

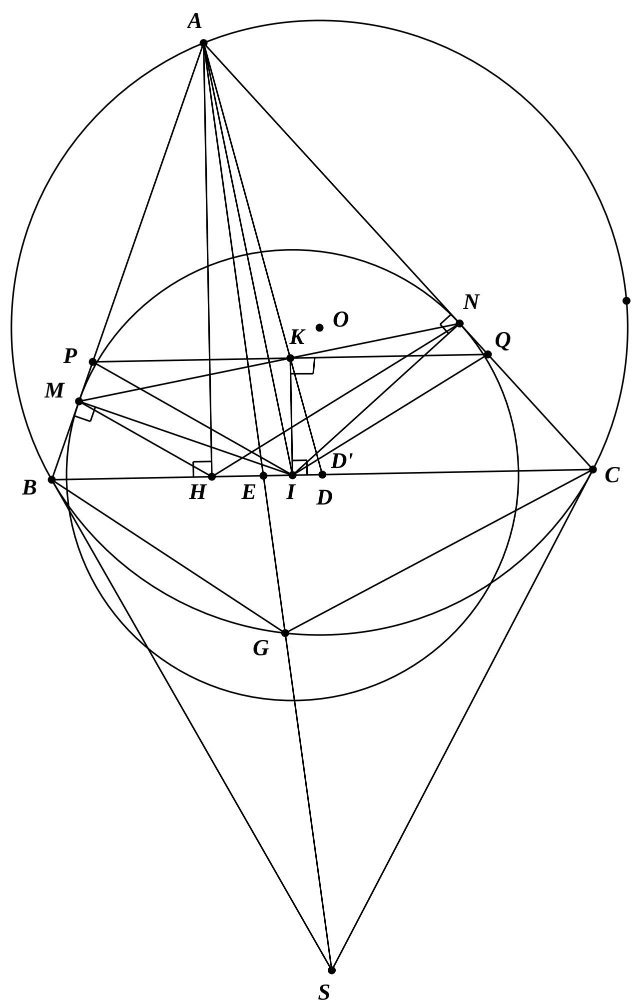
Cho tam giácnhọn ABC có $AB < AC$ nộitiếpđườngtròn (O). Mộtđườngtròntiếpxúcvớicáccạnh AB, AC tại M, N vàcótâm I thuộccạnh BC. Kẻđườngcao AH của tam giác ABC.

a) Chứng minh cácđiểm A, M, H, I, N cùngthuộcmộtđườngtrònvà HA làtiaphângiáccủagóc MHN.

b) Đườngthẳngđi qua I vàvuônggócvới BC cắt MN tại K. Chứng minh AK đi qua trungđiểm D của BC.

c) Tiếptuyếncủađườngtròn (O) tại B và C cắtnhautại S. Chứng minh $BAS = CAD$.

Hình vẽ:



Ý	Nội dung	Điểm
a (1,0 điểm)	Do AM, AN là các tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $AMI = ANI = 90^\circ$, suy ra các điểm M, N thuộc đường tròn đường kính AI.	0,25
	Ta có AH là đường cao của tam giác ABC nên $AHI = 90^\circ$, suy ra điểm H thuộc đường tròn đường kính AI. Suy ra cácđiểm A, M, H, I, N cùngthuộcđườngtrònđườngkính AI.	0,25
	Do tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên $AHM = ANM$ và $AHN = AMN$.	0,25
	Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau, suy ra $\triangle AMN$ cân tại A, suy ra $AMN = ANM$, suy ra $AHM = AHN$, hay HA làtiaphângiáccủagóc MHN.	0,25
b (1,0	Kẻ đường thẳng đi qua K và song song với BC cắt AB và AC tại P và Q. Ta có $IKP + IMP = 180^\circ$, suy ra tứ giác $IKPM$ nội tiếp, suy ra $KIP = KMP$.	0,25

điểm)	Chứng minh tươngtự ta có $KIQ = KNA$. Suyra $KIP = KIQ$.	0,25
	Xét tam giác IPQ có IK vừa là đường cao, vừa là phân giác nên nó là tam giác cân, suy ra IK là đường trung tuyến, hay K là trung điểm của PQ.	0,25
	Dựng$D$làgiaođiểmcủaAKvàBC. Do $PQ//BC$, ápdụngđịnhlýTalet ta có $\frac{KP}{BD} = \frac{AK}{AD} = \frac{KQ}{DC}$, suyra $DB = DC$. Suyra$D$làtrungđiểmcủaBC.	0,25
c (1,0 điểm)	Gọi E là giao điểm của AS và BC, G là giao điểm thứ 2 của AS và (O). Trên cạnh BC lấy điểm D' khác E sao cho $BAE = CAD'$, cần chứng minh D' là trung điểm của BC. Ta có $AGB = ACD'$ và $BAG = CAD'$ nên $\triangle AGB$ đồng dạng $\triangle ACD'$ Suy ra $\frac{GB}{CD'} = \frac{AG}{AC}$ (1)	0,25
	Ta có $AGC = ABD'$ và $CAG = BAD'$ nên $\triangle AGC$ đồng dạng $\triangle ABD'$ Suy ra $\frac{GC}{BD'} = \frac{AG}{AB}$ (2)	0,25
	Ta có $SBG = SAB$ nên $\triangle SBG$ đồng dạng $\triangle SAB$, suy ra $\frac{SB}{SA} = \frac{BG}{AB}$. Chứng minh tương tự ta được $\frac{SC}{SA} = \frac{CG}{AC}$. Suy ra $\frac{CG}{CA} = \frac{BG}{BA}$ (3)	0,25
	Từ (1), (2) và (3) suy ra $CD' = BD'$ hay D' là trung điểm của BC. Ta có điều phải chứng minh.	0,25

Câu 4 ***(1,5 điểm)***

a) Tìmcácsốnguyên x, y thỏamãn $x^3 + y^2 = xy^2 + 1$.

b) Cho cácsốnguyêndương a, b, c thỏamãn $c + \frac{1}{b} = a + \frac{b}{a}$. Chứng minh ab làlậpphươngcủamộtsốnguyêndương.

Ý	Nội dung	Điểm
a (0,75 điểm)	Ta có $x^3 + y^2 = xy^2 + 1 \Leftrightarrow (x^3 - 1) - y^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1 - y^2) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y^2 = x^2 + x + 1 \end{array}\right.$	0,25
	Với $x = 1$, khi đó phương trình có nghiệm $(1; y)$ với y là số nguyên.	0,25
	Với $y^2 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow (2y)^2 - (2x+1)^2 = 3 \Leftrightarrow (2y - 2x - 1)(2y + 2x + 1) = 3$ Lậpbảngxétcáctrườnghợp <table><tr><td>$2y-2x-1$</td><td>1</td><td>-1</td><td>3</td><td>-3</td></tr><tr><td>$2y+2x+1$</td><td>3</td><td>-3</td><td>1</td><td>-1</td></tr><tr><td>x</td><td>0</td><td>-1</td><td>-1</td><td>0</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>-1</td><td>1</td><td>-1</td></tr></table>Vậy tập các giá trị $(x; y)$ thỏa mãn là $\{(0;1), (0;-1), (-1;-1), (-1;1), (1; y), y \in \mathbb{Z}\}$	0,25
b (0,75	Ta có $c + \frac{1}{b} = a + \frac{b}{a} \Leftrightarrow abc + a = a^2b + b^2$	0,25

điểm)	Suy ra a chia hết cho b, đặt $a=bk, k\in \mathbb{N}^*$, thay vào điều kiện ta được $b^2kc+bk=b^3k^2+b^2 \Leftrightarrow bkc+k=b^2k^2+b$	0,25
	Suy ra b chia hết cho k và k chia hết cho b, suy ra $b=k$, suy ra $ab=b^3$, ta có điều phải chứng minh.	0,25

Câu 5 ***(1,5 điểm)***

a) Cho cácsốthựckhôngâm a,b,c thỏamãnđiềukiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3\le \frac{1}{8}+a^4+b^4+c^4.$$

b) Ban đầucó 2020 viênsỏiđểtrong 1 chiếctúi. Cóthểthựchiệncôngviệcnhưsau:

Bước 1: Bỏđi 1 viênsỏivà chia túinàythành 2 túimới.

Bước 2: Chọn 1 trong 2 túinàysaochotúiđócóítnhất 3 viênsỏi, bỏđi 1 viêntừtúinàyvà chia túiđóthành 2 túimới, khiđócó 3 túi.

Bước 3: Chọn 1 trong 3 túinàysaochotúiđócóítnhất 3 viênsỏi, bỏđi 1 viêntừtúinàyvà chia túiđóthành 2 túimới, khiđócó 4 túi.

Tiếptụcquátrìnhtrên.Hỏisaumộtsốbướccóthểtạoratrườnghợpmàmỗitúicóđúng 2 viênsỏi hay không?

Ý	Nội dung	Điểm
a (0,75 điểm)	Xét hiệu $\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)=a^3\left(1-a\right)+b^3\left(1-b\right)+c^3\left(1-c\right)$ $=a^3\left(b+c\right)+b^3\left(c+a\right)+c^3\left(a+b\right)=a^2\left(ab+ac\right)+b^2\left(bc+ba\right)+c^2\left(ca+cb\right)$	0,25
	Do a,b,c khôngâmnên bc,ca,ab khôngâm Suyra $a^2\left(ab+ac\right)+b^2\left(bc+ba\right)+c^2\left(ca+cb\right)$ $\le a^2\left(ab+ac+bc\right)+b^2\left(bc+ba+ca\right)+c^2\left(ca+cb+ab\right)$ $=\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$	0,25
	$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(2ab+2bc+2ca\right)\le \frac{1}{2}\frac{\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)^2}{4}=\frac{1}{8}$ Suyrađiềuphảichứng minh.	0,25
b (0,75 điểm)	Sau mỗi bước, số sỏi giảm đi 1 và số túi tăng lên 1, suy ra tổng số sỏi và túi không thay đổi sau mỗi bước, tổng này là 2021.	0,25
	Giả sử sau một số bước có thể tạo ra trường hợp mà mỗi túi có đúng 2 viên sỏi, khi đó tổng số sỏi và túi phải chia hết cho 3.	0,25
	Do 2021 không chia hếtcho 3 nênmâuthuẫn, suyragiảsửsai. Vậykhôngthểtạoratrườnghợpmàmỗitúicóđúng 2 viênsỏisaumộtsốbước.	0,25

Chú ý:

- *Nếuthísinhlàmđúngmàcáchgiảikhácvớiđápánvàphùhợpkiếnthứccủachươngtrình THCSthìtổchấmthốngnhấtchođiểmthànhphầnđảmbảotổngđiểmnhưhướngdẫnquyđịnh.*
- *Tổngđiểmtoànbàikhônglàmtròn.*

---------- HẾT ----------