SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LẠNG SƠN

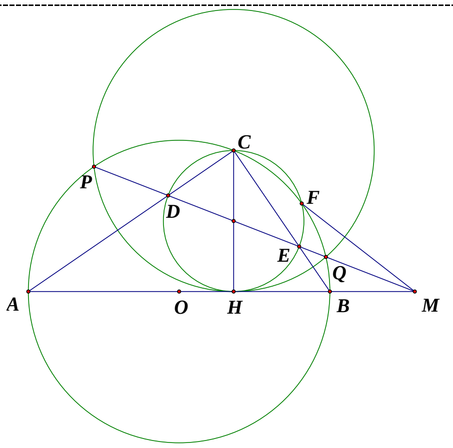
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 11 NĂM HỌC 2020 - 2021

HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN LỚP 11 CHUYÊN

(Hướng dẫn chấm gồm 03 trang)

Chú ý: Những cách giải khác HDC mà đúng thì cho điểm theo thang điểm đã định.

Câu	Nội dung	Điểm
1 (5đ)	$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-y)+xy(x^2-y)+xy=1 \\ (x^2-y)^2+xy=1 \end{cases}$	1.0
	Đặt $\begin{cases} a=x^2-y \\ b=xy \end{cases}$. Hệ trở thành: $\begin{cases} a+ab+b=1 \\ a^2+b=1 \end{cases} \quad (*)$ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+a^2-2a=0 \\ b=1-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2+a-2)=0 \\ b=1-a^2 \end{cases}$ Từ đó ta có: $(a;b)\in\{(0;1);(1;0);(-2;-3)\}$	1.0
	Với $(a;b)=(0;1)$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2-y=0 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$	1.0
	Với $(a;b)=(1;0)$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2-y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)\in\{(0;-1);(1;0);(-1;0)\}$	1.0
	Với $(a;b)=(-2;-3)$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2-y=-2 \\ xy=-3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{3}{x} \\ x^3+2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{3}{x} \\ (x+1)(x^2-x+3)=0 \end{cases} \Rightarrow x=-1; y=3$ Kết luận: Hệ phương trình có các nghiệm: $(x;y)\in\{(1;1);(0;-1);(1;0);(-1;0);(-1;3)\}$	1.0
2 (6 đ)	a) Bằng quy nạp, chứng minh được $u_n\in(1;2) \quad (1)$	1.0
	Xét $f(x)=x^2-2x+2, \quad \forall x\in(1;2)$ $f'(x)=2x-2>0, \ \forall x\in(1;2)$	0.5
	Có $u_2=u_1^2-2u_1+2=\dfrac{5}{4}<u_1$. Suy ra (u_n) là dãy giảm $\quad (2)$	1.0
	Từ $(1),(2)$ suy ra $\exists L\in\mathbb{R}:\lim u_n=L \ (0<L<2)$. Chuyển qua giới hạn, được: $L=L^2-2L+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} L=1 \ (t/m) \\ L=2 \ (l) \end{array}\right.$	1.0
	Vậy $\lim u_n=1$.	0.5
	b) Xét $f(x)=x^2-2x+2$ $f'(x)=2x-2=0\Leftrightarrow x=1$ $f(x)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$	0.5

<table>
<tr><td></td><td>Bảng biến thiên
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$\searrow$</td><td>2</td><td>$\searrow$</td><td>1</td><td>$\nearrow$</td><td>2</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)-x$</td><td></td><td>$+$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Từ bảng biến thiên, ta có:
TH1: $m=1 \Rightarrow u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim u_n = 1$
TH2: $m=2 \Rightarrow u_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim u_n = 2$
TH3: $m=0 \Rightarrow u_2 = 2 \Rightarrow u_n = 2, \forall n \ge 2 \Rightarrow \lim u_n = 2$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>TH4: $m \in (1;2)$, tương tự ý a) suy ra $\lim u_n = 1$
TH5: $m \in (2;+\infty)$. (u_n) là dãy tăng. Giả sử (u_n) bị chặn trên.
Khi đó $\exists L \in \mathbb{R} : \lim u_n = L \ (L > 2)$
Chuyển qua giới hạn, được: $L = L^2 - 2L + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} L = 1 \ (l) \\ L = 2 \ (l) \end{array}\right.$
Vậy $\lim u_n = +\infty$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>TH6: $m \in (0;1) \Rightarrow u_2 \in (1;2)$. Theo TH4, suy ra $\lim u_n = 1$.
TH7: $m \in (-\infty;0) \Rightarrow u_2 \in (2;+\infty)$. Theo TH5, suy ra $\lim u_n = +\infty$.
Vậy $m \in [0;2]$ thì dãy số có giới hạn hữu hạn.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3
(2 đ)</td><td>$f\left[(x+1)f(y)\right] = yf\left[f(x)+1\right] \qquad (*)$
Chọn $x=-1; y=0 \Rightarrow f(0)=0$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Cố định x; Lấy $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(y_1) = f(y_2)$. Thay vào $(*)$, được
$y_1 f\left[f(x)+1\right] = f\left[(x+1)f(y_1)\right] = f\left[(x+1)f(y_2)\right] = y_2 f\left[f(x)+1\right] \Rightarrow y_1 = y_2$
Suy ra f là đơn ánh.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Cho $y=1$, kết hợp f là đơn ánh. Ta có:
$f\left[(x+1)f(1)\right] = f\left[f(x)+1\right] \Rightarrow (x+1)f(1) = f(x)+1 \Rightarrow f(x) = ax+b, \quad (a,b \in \mathbb{R})$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Thử lại thấy $\left\{\begin{array}{l} b=0 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right. \end{array}\right.$ thỏa mãn.
Vậy hàm số cần tìm là $f(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}; f(x)=x, \forall x \in \mathbb{R}$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>4
(5 đ)</td><td>a) Ta có
$CA.CD = CH^2 = CB.CE$, suy ra tứ giác $ABED$ nội tiếp.

</td><td>1.0</td></tr>
</table>

	AB là trục đẳng phương của (O) và đường tròn $(ABED)$	0.5
	DE là trục đẳng phương của $(ABED)$ và đường tròn đường kính CH	0.5
	CF là trục đẳng phương của (O) và đường tròn đường kính CH	0.5
	Suy ra DE, AB và CF đồng quy.	0.5
	b) Gọi M là giao điểm của DE, AB và CF. Ta có PQ là trục đẳng phương của (C) và (O) nên $OC \perp PQ$.	0.5
	Ta cũng dễ thấy $OC \perp DE$.	0.5
	Hơn nữa M chính là tâm đẳng phương của ba đường tròn (C), (O) và đường tròn đường kính CH. Suy ra PQ đi qua M.	0.5
	Vậy DE, PQ cùng đi qua M và cùng vuông góc với OC nên trùng nhau. Suy ra P, D, E, Q thẳng hàng.	0.5
5 **(2 đ)**	a) Giả $\lvert A_i \cap A_j \rvert = k \neq 1$. Suy ra $\lvert A_i \rvert = k.\lvert A_j \rvert, \forall i, j = \overline{1,167}, i \neq j$ (mâu thuẫn)	0.5
	Do đó $\lvert A_i \cap A_j \rvert = 1$ và $\lvert A_i \rvert = 12$ với $i, j = 1, 2, \ldots, 167$ và i khác j.	0.5
	b) Ta sẽ chứng minh $\left\lvert \bigcap_{i=1}^{167} A_i \right\rvert = 1$ (*). Thật vậy, xét tập A_1. Từ $\lvert A_1 \cap A_i \rvert = 1$ với $i = 2, \ldots, 167$ suy ra mỗi tập $A_2, A_3, \ldots, A_{167}$ chứa đúng một phần tử của A_1. Do $\lvert A_1 \rvert = 12$ nên theo nguyên lí Đirichlet thì tồn tại và có thể giả sử là $A_2, \ldots, A_{15}$ cùng chứa phần tử a thuộc A_1. Nếu có $i > 15$ sao cho $a \notin A_i$ thì $\lvert A_i \cap A_j \rvert = 1 \Rightarrow \lvert A_j \cap (A_i \setminus \{a\}) \rvert = 1$. Vậy: $A_j \cap (A_i \setminus \{a\}) = \{b_j\}$ với $j = 2, 3, \ldots, 15$ (1). Dễ thấy các b_j là phân biệt nên từ (1) suy ra A_i chứa quá 12 phần tử. Trái với kết luận $\lvert A_i \rvert = 12$.	0.5
	Từ (*) và $\lvert A_i \cap A_j \rvert = 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, 167$ và i khác j suy ra: $\left\lvert \bigcup_{i=1}^{167} A_i \right\rvert = \left\lvert (\bigcup_{i=1}^{167} (A_i \setminus \{a\}) \cup \{a\} \right\rvert = \left\lvert (\bigcup_{i=1}^{167} (A_i \setminus \{a\}) \right\rvert + \lvert \{a\} \rvert = 167.11 + 1 = 1838.$	0.5